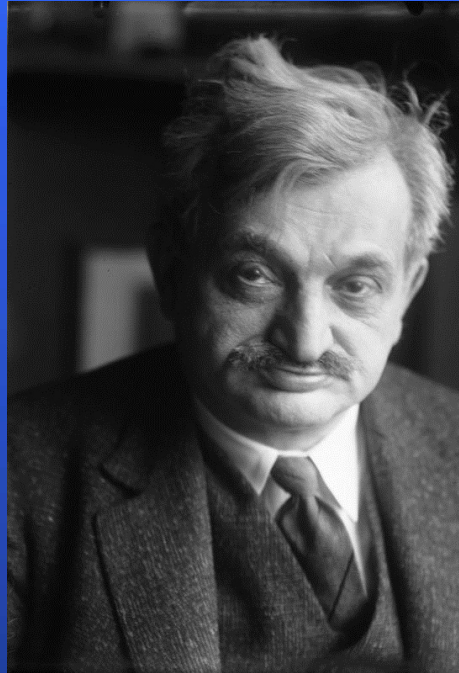


# Emanuel Lasker: Ein Leben zwischen Schach, Mathematik und Spiel



Vortrag zum *Lasker-Tag* des *BAYER-Schachclubs*  
Leverkusen 13. Oktober 2018

**Jörg Bewersdorff**

[www.bewersdorff-online.de](http://www.bewersdorff-online.de)

# Zur Person



1975-1982 Studium der Mathematik (Bonn)

1985 Promotion (Bonn): Zahlentheorie, algebraische Topologie

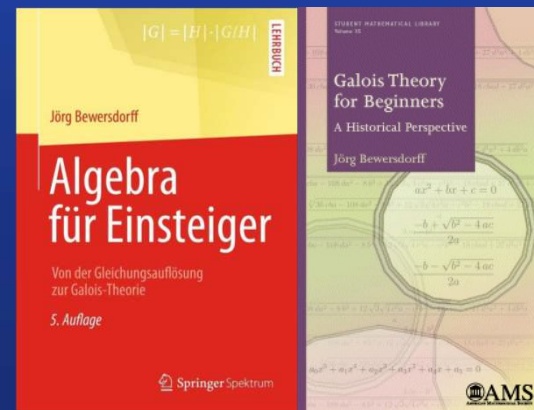
1985- tätig in der Automatenindustrie, seit 1998 als Geschäftsführer

1998 „Glück, Logik und Bluff“ (7 deutsche Auflagen, engl. Übers.)

2002 „Algebra für Einsteiger“ (5 deutsche Auflagen, engl. u. kor. Übers.)

2011 „Statistik - wie und warum sie funktioniert“

2014 „Objektorientierte Programmierung mit JavaScript“ (2 Auflagen)



# Lasker (1868-1941): Schach und Mathematik

1894 Weltmeister gegen Steinitz

1896/97 Revanche

1907 Titel-Verteidigung gegen Marshall, ...

1908 ... Tarrasch, ...

1910 ... Schlechter und ...

1910 ... Janowski.

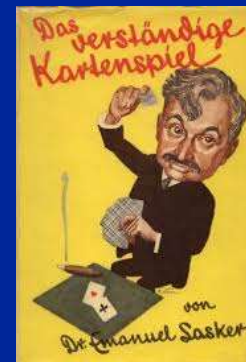
1921 Capablanca wird WM gegen Lasker

1888/89 Mathematik-Studium in Berlin,  
1891 in Göttingen

1897 Mathematik-Studium in Heidelberg,  
1897/98 in Berlin

1900 Promotion in Erlangen bei Max Noether

1905 Satz von «Lasker-Noether»



1929 «Das verständige Kartenspiel»

1931 «Brettspiele der Völker»



# 1901 veröffentlichte Dissertation

## IX. Über Reihen auf der Convergengrenze.

Von EMANUEL LASKER, *Dr. Phil.*

*Communicated by Major MACMAHON, F.R.S.*

Received March 15,—Read April 5, 1900. Revised February, 1901.

1. Es seien  $x_1 \dots x_r$   $r$  complexe Variabele, welche in einem  $2r$ -dimensionalen fictiven Raume als Coordinaten seiner reellen Punkte dienen mögen. Das System der Werte  $x_1 \dots x_r$  sei kurz mit "Punkt"  $x_1 \dots x_r$  bezeichnet. Sind  $e_1 \dots e_r$   $r$  positive endliche im übrigen beliebig kleine Zahlen, und nimmt  $\eta_i$  alle complexen Werte an, die der Ungleichung

$$|\eta_i| \leq e_i$$

genügen, so heisse das Aggregat aller Punkte

$$x_1 + \eta_1, x_2 + \eta_2, \dots, x_r + \eta_r$$

die *Nachbarschaft* des Punktes  $x_1 \dots x_r$ .

2. Es sei ferner  $u_1, u_2 \dots u_n \dots$  eine Folge unendlich vieler Functionen von  $x_1 \dots x_r$  und

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

absolut und gleichmässig convergent für die Nachbarschaft eines Punktes  $P \equiv x_1 \dots x_r$ .  $P$  wird dann *innerer Convergengpunkt* der Reihe  $\sum_1^\infty u_n$  genannt werden. Die Gesammtheit aller inneren Convergengpunkte der Reihe bilden ihren *inneren Convergengbereich*, die Begrenzung dieses Bereiches ihre *Convergenggrenze*.

# Der Satz von Lasker-Noether

Zur Theorie der Moduln und Ideale.

Von

E. LASKER in New-York.

---

Kapitel I.

**Eliminationssätze.**

1. Es sollen im folgenden einige Sätze über Systeme von Formen bewiesen werden, deren Resultante nicht verschwindet. Neben den Sätzen I, II, III, welche neu und für vielerlei Anwendungen der vorliegenden Untersuchung von Bedeutung sind, sind einige Sätze, vornämlich Satz IV und V, aufgestellt, die bereits bekannt und Gegenstand strengster Forschung gewesen sind. Dies könnte befremden und bedarf daher der Erläuterung. In zwei späteren Kapiteln (nämlich III und IV) werden die Grundlagen der Untersuchung, wie sie bis dorthin vorgeschritten ist, erweitert werden, und zwar in der Weise, daß ganze Serien von Schlüssen aus den vorangehenden Kapiteln übernommen werden können. Es ist daher zweckmäßig, die Beweise der bekannten Sätze von vornherein so zu stellen, daß ihre Übertragbarkeit auf die modifizierenden Verhältnisse ohne weiteres einleuchtet. Dies geschieht, indem jene Beweise auf das geringste Maß von Voraussetzungen gegründet werden.

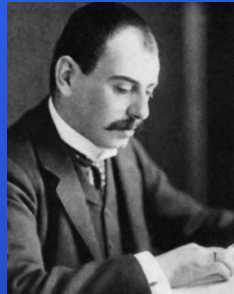
# Der Satz von Lasker-Noether

- Es geht um Systeme von Gleichungen mit Polynomen mit mehreren Unbekannten, und die Zerlegung ihrer Lösungsmenge in „unzerlegbare“ Teile.
- Dabei werden statt eines geometrischen Objekts (Lösungsmenge) algebraische Objekte (bestimmte Mengen von Polynomen in mehreren Unbekannten) untersucht.
- Der Satz wurde später von Emmy Noether verallgemeinert, der Tochter von Laskers Doktorvater Max Noether. Dort geht es nur noch um algebraische Objekte.



# Laskers Kontakte zu Spitzenforschern

- Göttingen galt ab ca. 1890 bis zum Ersten Weltkrieg (und nochmals in den Jahren vor 1933) als das Weltzentrum der Mathematik (und der Physik).
- Lasker pflegte nachweislich Kontakte zu David Hilbert (Gö.), Edmund Landau (Gö.), Adolf Hurwitz (Zürich), Otto Toeplitz (Gö.) und Ernst Zermelo.
- Mit Albert Einstein war Lasker ab 1927 befreundet.





# War Lasker ein Spieltheoretiker?

- „Das Erstaunliche darin ist, daß in seinen Darlegungen (1918!) alle Grundgedanken der modernen Theorie der Spiele und die Beschreibung aller zu diesem Grundgedanken führenden Abstraktionsprozesse enthalten ist.“  
Georg Klaus (1965)
- Spieltheorie („Interaktive Entscheidungstheorie“):  
Grundlage ist ein mathematisch definiertes Modell eines Spiels. Ziel sind ökonomische Anwendungen. Möglich sind aber auch Untersuchungen realer Gesellschaftsspiele.
- Borel (1921-), von Neumann (1928, 1944 mit Morgenstern)



# Spieltheorie für Spiele: Schach

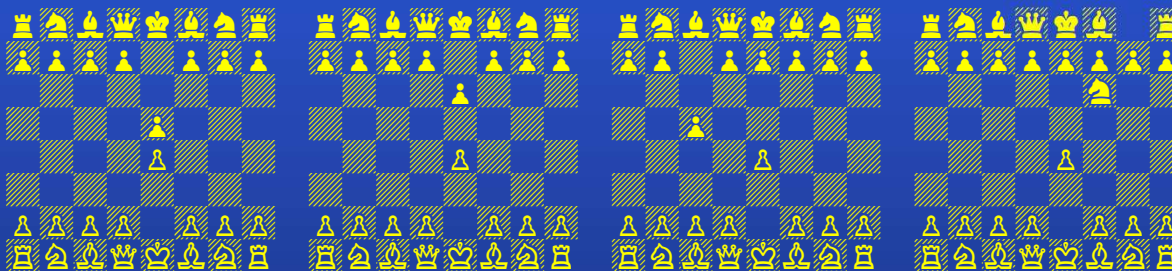
Ernst Zermelo (1912):  
 Jede Position hat die  
 Qualität einer Problemposition.



ÜBER EINE ANWENDUNG DER MENGENLEHRE AUF  
 DIE THEORIE DES SCHACHSPIELS

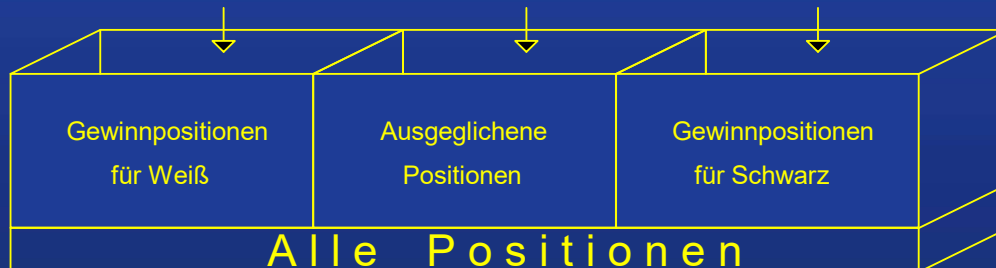
VON E. ZERMELO.

Die folgenden Betrachtungen sind unabhängig von den besonderen Regeln des Schachspiels und gelten prinzipiell ebensogut für alle ähnlichen Verstandesspiele, in denen zwei Gegner unter Ausschluss des Zufalls gegeneinander spielen; es soll aber der Bestimmtheit wegen hier jeweilig auf das Schach als das bekannteste aller derartigen Spiele exemplifiziert werden. Auch handelt es sich nicht um irgend eine Methode des praktischen Spiels, sondern lediglich um die Beantwortung der Frage: kann der Wert einer beliebigen während des Spiels möglichen Position für eine der spielenden Parteien sowie der bestmögliche Zug mathematisch-objektiv bestimmt oder wenigstens definiert werden, ohne dass auf solche mehr subjektiv-psychologischen wie die des "vollkommenen Spielers" und dergleichen Bezug genommen zu werden brauchte? Dass dies wenigstens in einzelnen besonderen Fällen möglich ist, beweisen die sogenannten "Schachprobleme," d. h. Beispiele von Positionen, in denen



Ganz anders:

	0:0	0:1
	1:0	0:0
	0:1	1:0
	0:0	0:0



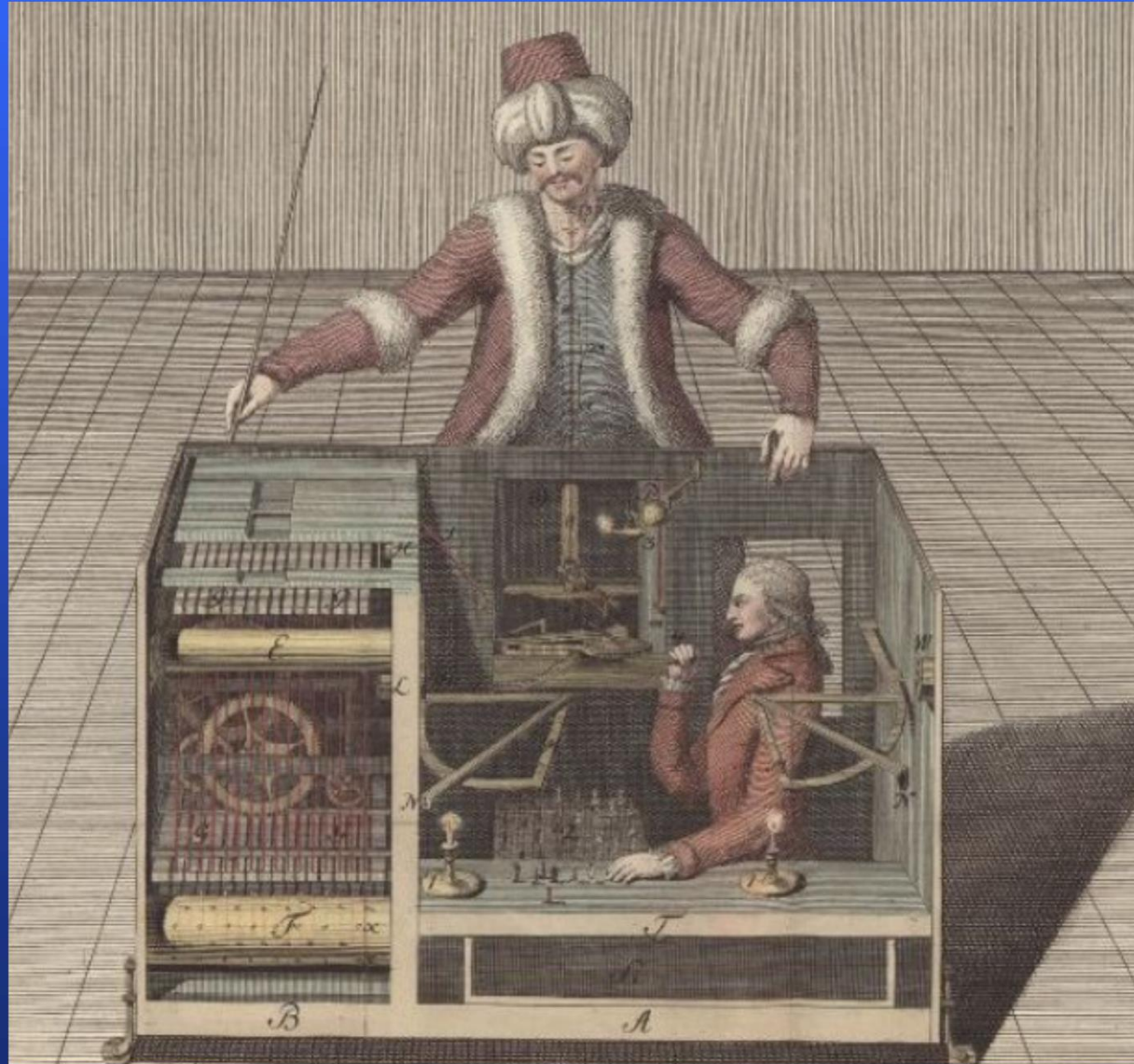
Mindestens ein Kasten enthält mehr als eine der vier Positionen

# Spieltheorie für Spiele: Schach

In Folge hat Robert Hübner\* die Beschränkung von Zug-Annotationen auf die Symbole „?“ und „??“ befürwortet, je nachdem, ob sich durch einen schlechten Zug der sicher erzielbare Gewinn um den Wert 1 oder 2 verringert.

(\*) *Twenty-five annotated games*, Berlin 1996, S. 7-8.

# War Zermelos Erkenntnis neu?



# War Zermelos Erkenntnis neu?

Arithmetische oder algebraische Berechnungen sind ihrem Wesen nach bestimmt. Wenn gewisse Daten gegeben werden, müssen gewisse Resultate notwendig und unausbleiblich folgen. ... Da dies der Fall ist, können wir uns ohne Schwierigkeit die Möglichkeit vorstellen, eine Mechanik zu verfertigen, die von den Daten der Fragen ausgehend richtig und unabweislich zu der Lösung vorschreitet, da dies Vorschreiten, wie verwickelt es auch immer sein mag, doch nach ganz bestimmtem Plane vor sich geht. Bei dem Schach-spieler liegt die Sache durchaus anders. Bei ihm ist der Fortschritt in keiner Weise bestimmt. Kein einziger Zug im Schachspiel folgt notwendig aus einem anderen. Wir können aus keiner Stellung der Figuren zu einer Periode des Spiels ihre Stellung zu einer anderen voraussagen ... In genauem Verhältnis zu dem Fortschreiten des Schachspiels steht die Ungewissheit jedes folgenden Zuges. Wenn ein paar Züge gemacht worden sind, so ist kein weiterer Schritt mehr sicher. Verschiedene Zuschauer des Spieles würden verschiedene Züge anraten. Es hängt also alles vom veränderlichen Urteil der Spieler ab. Wenn wir nun annehmen (was nicht anzunehmen ist), dass die Züge des automatischen Schachspielers in sich selbst bestimmt wären, so würden sie doch durch den nicht zu bestimmenden Willen des Gegenspielers unterbrochen und in Unordnung gebracht werden. Es besteht also gar keine Analogie zwischen den Operationen des Schachspielers und denen der Rechenmaschine des Herrn Babbage ...

Edgar Allan Poe (1836, *Southern Literary Messenger*)



The Automaton Chess-Player was invented in 1769, by Baron Kempelen, a nobleman of Presburg in Hungary, who afterwards disposed of it, together with the secret of its operations, to its present possessor. Soon after its completion it was exhibited in Presburg, Paris, Vienna, and other continental cities. In 1783 and 1784,



# War Zermelos Erkenntnis neu?

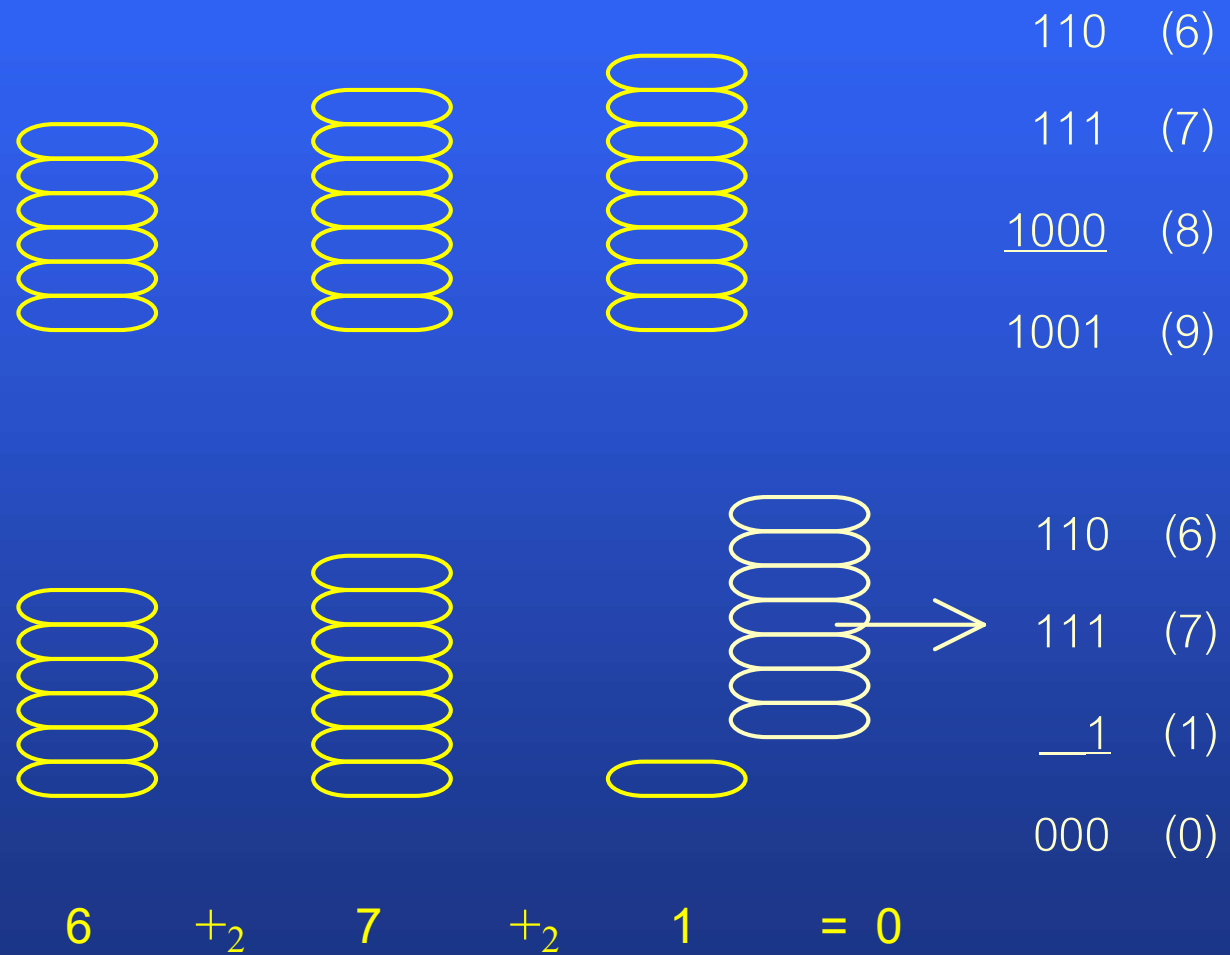
- [E]ine abschließende, alle nur möglichen Fälle umfassende Theorie [ist] kaum denkbar ... und [liegt] für das Schach z. B. nicht im geringsten [vor, wird] ... auch schwerlich jemals gewonnen werden ..., wir meinen eine Theorie, welche für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und welche etwa das Resultat ergeben würde, dass der Anziehende stets siegen muss oder, was wohl wahrscheinlicher ist, die Partie - auch bei absolut korrektem Spiel des Gegners - stets unentschieden machen kann ...  
*Walter Ahrens (1901, Mathematische Unterhaltungen und Spiele)*
- Wenn das Problem des Schachmatts lösbar wäre, so mußte es, sollte man glauben, nach so langer Zeit so vieler und so ernster Bemühungen gelöst sein. Und dennoch war man so weit entfernt wie je, ja, weiter denn je. Daraus schloß Steinitz, dass die Anfangsstellung im Gleichgewicht sein müsse. Ein Schluß aus Erfahrung und daher nicht so sicher wie  $2 + 2 = 4$ . Er ist nicht einmal ausgedrückt, denn im genauen Gleichgewichte kann die Anfangsstellung kaum sein, da das Recht des Anzugs einen Unterschied zwischen Weiß und Schwarz hervorbringt, einen Unterschied, der wohl nicht ganz unwesentlich sein dürfte.  
*Emanuel Lasker (1925, Gesunder Menschenverstand im Schach)*

# Nim: Die Regeln

- Mehrere Haufen mit (unterschiedslosen) Spielsteinen
- Pro Zug müssen von genau einem Haufen beliebig viele Steine weggenommen werden (es kann auch der gesamte Haufen sein).
- Der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt.



# Nim: Spiel mit Gewinnformel



Nimrod auf der Berliner Industrieausstellung 1951:  
Der Wirtschaftsminister, dahinter sein Kanzler.



# Nim in «Brettspiele der Völker» (1931)

Ein weiteres Moment tritt auf, sobald über die Höhe der wegzunehmenden Früchte nichts ausgemacht wird, dagegen verschiedene Haufen auf den Tisch gelegt werden. Der Prototyp derartiger Spiele ist „Nimm“, nach Ahrens ein altchinesisches Spiel. [...]

Die Spielregeln lauten: Zwei Personen ziehen abwechselnd. Der Zug besteht darin, daß man von einem von drei Haufen, die je Erbsen, Bohnen, Linsen enthalten, einige Früchte fortnimmt, wie viele man will. Wer den Tisch leert, gewinnt.

Aber das allgemeine Gesetz des Spiels, die mathematische Induktion der Reihe der Verluststellungen, ward erst durch ein Genie entdeckt.

Ich weiß nicht, wer die mathematische Induktion bei „Nimm“ vollzogen hat, aber seine Tat war bewundernswert. Die Regel, nach der entschieden werden kann, ob eine Lage, welche immer, eine Verluststellung ist oder nicht, ist sehr entlegen, sodann begreift man kaum, durch welche Ideen-Assoziation der Erfinder eine solche Regel hat vermuten, geschweige richtig erraten können. Er hat sie erkannt und uns überliefert und seinen Namen für sich behalten. Gerne wüßten wir mehr von ihm, aber er hat es für gut befunden, sein Inkognito zu wahren. Nun kann man nur vermuten, wer er war. Gewiß ein Mathematiker, wohl einer, der eigene Wege ging, dabei ein echter Erfinder und wahrscheinlich ein sehr anregender Lehrer.

Die überlieferte Regel beginnt mit der Forderung, die drei Zahlen, nämlich die Anzahl der Erbsen, der Bohnen und der Linsen, im dyadischen System zu schreiben.

Die Grundzahl des dyadischen Systems ist die Zwei. Wir benützen das







# «Lasker»-Nim: Die Spielregel

Eine interessante Variation entsteht, wenn man die Spielregel wie folgt festsetzt: Der am Zuge Befindliche darf irgendeinen der Haufen in zwei Haufen zerteilen oder aber, nach seinem freien Ermessen, verkleinern. Der Unterschied gegen das „Nimm“-Spiel besteht darin, daß nunmehr die Zahl der Haufen während des Spiels wachsen kann. Beispielsweise bei der Lage 1, 2, 3 kann der am Zuge Befindliche den Dreier-Haufen in zwei Haufen von einer und von zwei Früchten zerteilen, und es ist leicht zu sehen, daß er so dem Verlust entgeht. Denn was soll der Nachziehende nun tun? Zerteilt er einen der Zweier-Haufen, so folgt der Gegner seinem Beispiel. Das tut der Gegner überhaupt und konsequent, so muß der Gegner gewinnen. Daraus folgt, daß 1, 2, 3 keine Verluststellung ist,



# «Lasker»-Nim: Die Analyse (1)



Zwei Verluststellungen aneinandergefügt, ergeben eine neue. Das läßt sich ohne weiteres einsehen, denn der Nachziehende kann jeden Zug des Anziehenden so beantworten, als wäre die nichtgespielte Verluststellung gar nicht vorhanden, und muß auf diese Art zuletzt den Tisch leeren, also gewinnen. Beispielsweise, da 1, 1 und 1, 2, 4 Verluststellungen sind, ist auch 1, 1, 1, 2, 4 eine solche.

Wiederum, eine Verluststellung an eine Gewinnstellung gefügt, ergibt eine Gewinnstellung, weil ja der Zug, der die ursprüngliche Gewinnstellung in eine Verluststellung verwandelt, auch die erweiterte Stellung in eine Verluststellung verwandelt.





## «Lasker»-Nim: Die Analyse (2)

Das Gesetz der Verluststellungen habe ich nicht gefunden. [...]

[Es] gilt für beide, [...] daß zwei gleiche Haufen eine Verluststellung sind. Das scheint mir den Charakter von Spielen zu bestimmen, die dem „Nimm“ eng verwandt sind.

Für derlei Spiele gelten nämlich eigentümliche Erwägungen. Zunächst findet sich, daß zwei Gruppen von Haufen „äquivalent“ sein können, indem in jeder Verluststellung, wo die eine Gruppe vorkommt, diese durch die andere ersetzt werden kann, ohne daß der Charakter der Stellung aufgehoben würde. Zwei äquivalente Gruppen, zueinander gelegt, erzeugen eine Verluststellung. Sodann kann man fragen, welche Haufen äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen sind. Dabei findet sich, daß gewisse Haufen nicht äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen sind. Diese letzteren Haufen sind beim „Nimm“-Spiel die Potenzen von 2:

1, 2, 4, 8, 16 . . . . .

# Laskers Überlegungen



- $V_1 + V_2$  ist Verluststellung (erwidere Zug lokal)
- $G + V$  ist Gewinnstellung (eröffne in  $G$ , dann wie zuvor)
- Die Addition einer Verlustpositionen ändert den Gewinncharakter einer Position nicht, analog zur Addition einer Null.
- $X + X'$  mit zwei äquivalenten Stellungen  $X$  und  $X'$  ist Verluststellung (ist äquivalent  $X + X$ , dort erwidert der Nachziehende jeden Zug als Kopie im «Spiegelbild»).
- Nicht bei Lasker: Eine Position  $X$ , für die  $G + X$  und  $G$  stets den gleichen Gewinncharakter aufweisen, ist eine Verlustposition (nehme die Endposition für  $G$ )





## «Lasker»-Nim: Die Analyse (3)

alle übrigen Haufen dagegen sind äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen, beispielsweise der Haufe 6 ist äquivalent der Gruppe 2, 4. Bei anderen Spielen der obigen Art findet man eine andere Reihe von Haufen, die nicht äquivalent einer Gruppe von kleineren Haufen sind, und diese Reihe legt das Gesetz des Spiels fest. Man errät hier Zusammenhänge, die noch geheimnisvoll sind.

Bei der obigen Variante des „Nimm“-Spiels sind die Haufen, die nicht äquivalent Gruppen von kleineren Haufen sind

1, 2, 3, 7, 15, 31 . . . . .

Nennen wir diese letzten Haufen kurz „prim“.

Von der 3 an ist jeder Haufe dieser Art eine Potenz von 2 verringert um 1. Jeder beliebige Haufe ist entweder äquivalent einem dieser Haufen oder äquivalent einer Gruppe dieser Haufen. Beispielsweise 4 äquivalent 1, 2; 5 äquivalent 1, 3; 6 äquivalent 2, 3; 8 äquivalent 1, 2, 3; 9 äquivalent 1, 7; 10 äquivalent 2, 7; 11 äquivalent 3, 7;

[...] Ist diese Reihe bekannt, so folgt daraus der Charakter aller möglichen Verluststellungen des Spiels.



# Laskers Ergebnisse und ein Beispiel

- Im Lasker-Nim sind die primen Haufen: 1, 2, 3, 7, 15, 31, ...
- Für die nicht-primen Haufen gilt:
  - 4 ~ 1, 2
  - 5 ~ 1, 3
  - 6 ~ 2, 3
  - 8 ~ 1, 2, 3
  - 9 ~ 1, 7
- Zum Beispiel ist  
1, 2, 2, 6, 8 ~ 1, 6, 8 ~ 1, 2, 3, 1, 2, 3 ~ 0 eine Verluststellung
- Offen: Wie berechnet man die primen Haufen effektiv?
- Auf anderem Weg unabhängig voneinander durch Sprague und Grundy (1935/39) gelöst (für beliebige Nim-Varianten).

# Einfaches Drei-Personen-Nim



- Spielregeln:
  - 1 Haufen, 3 reihum ziehende Spieler.
  - Pro Zug sind 1 bis 5 Steine zu entfernen.
  - Der Spieler, der den letzten Zug macht, gewinnt eine Einheit von demjenigen Spieler, der als Vorletzter gezogen hat. Der dritte Spieler bleibt ohne Gewinn bzw. Verlust.
- Beginnend mit Stellungen kurz vor Ende des Spiels und dann weiter entgegen der Spielchronologie zerlegt Lasker die Stellungen in drei Teilmengen, nämlich in
  - die Verluststellungen 6, 13, 20, ...,
  - die Gewinnstellungen 1 bis 5, 8 bis 12, 15 bis 19, ... und
  - die „Schlichtstellungen“ (kein Gewinn/Verlust) 0, 7, 14, ...
- Die Benennungen der drei Teilmengen beziehen sich jeweils auf das Resultat, das der Anziehende erzielt, wenn jeder der Spieler im weiteren Verlauf der Partie seinen eigenen Interessen gemäß agiert.





# Lasker und ein Nash-Gleichgewicht

$17 \xrightarrow{A} 14 \xrightarrow{B} 13 \xrightarrow{C} 8..12 \xrightarrow{A} 7 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{C} 1..5 \xrightarrow{A} 0$ : A gewinnt, C verliert, B:0

$17 \xrightarrow{A} 14 \xrightarrow{B} 11? \xrightarrow{C} 7 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 1..5 \xrightarrow{C} 0$ : C gewinnt, B verliert, A : 0

$17 \xrightarrow{A} 14 \xrightarrow{B} 11? \xrightarrow{C} 6? \xrightarrow{A} 1..5 \xrightarrow{B} 0$ : B gewinnt, A verliert, C:0

[...] A gewinnt demnach, wofern nicht B seinem eigenen Interesse entgegen handelt, und er verliert auch dann nicht, wenn nicht zudem C denselben Fehler begeht.

Wenn freilich B und C jeder einmal im Spiel solchen Fehler begehen, um nachher das Spiel fehlerlos zu Ende zu führen, so ist A verloren. Indessen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ehrliches Spiel vorausgesetzt, sehr gering. Wer einmal fehlgeht, wird mehrmals fehlgehen, denn es gehören ja Verständnis, Einsicht, Mühe dazu, den rechten Weg zu finden und zu gehen. Nur für den Fall daß B und C die Einsicht plötzlich während des Spiels käme, ist obiger Schluß irrig.

Nash-Gleichgewicht: Definition und Existenzbeweis 1950 durch John Nash, der dafür 1994 den Ökonomie-Nobelpreis erhielt



# Lasker über Backgammon



- Bei Lasker «Puff und Tric-Trac»
- Er beginnt, völlig schlüssig, mit späten Endspielstellungen

Die Erwägung, wie die rechte Spielweise zu finden sei, hat mit der Betrachtung des Endes der Partie zu beginnen. Setzen wir den einfachen Fall, die Steine seien im Endquartier versammelt und es handle sich im wesentlichen nur noch darum, sie herauszunehmen. Wieviel Würfe werden je nach der Stellung der Steine dazu erforderlich sein? Wir setzen zunächst einmal alle 15 weißen Steine auf die 24 und fragen nach der obigen Zahl der Würfe für diesen extremen Fall. Mit jedem einfachen Wurf nimmt der Spieler zwei Steine heraus, mit jedem Doppelwurf vier. Ein Doppelwurf wird normalerweise unter sechs Würfen einmal vorkommen. Daß er in einer Reihe von sechs Würfen zweimal vorkommt, ist ein seltener Fall, denn normalerweise kommen zwei Doppelwürfe erst in



# Ein Hauch von „Monte-Carlo-Methoden“

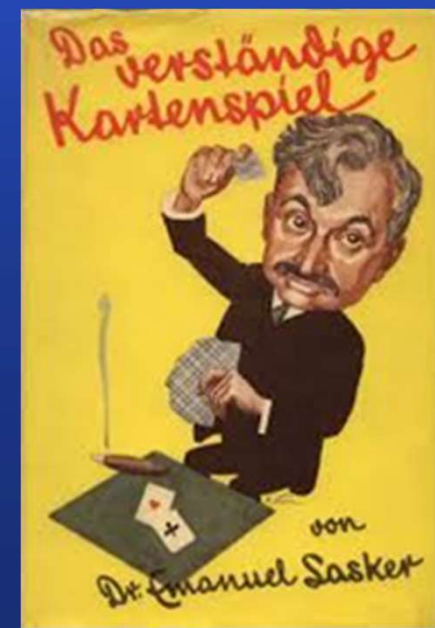


16 Jahre bevor Stanislaw Ulam in Los Alamos während einer Krankheit Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Kartenspiel Canfield Solitaire ermittelte, schrieb Lasker über Puff/Tric-Trac (Backgammon):

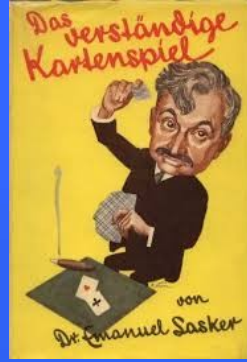
Einzelne der obigen Zahlenwerte habe ich geschätzt und ich rate meinen Lesern, sie zu kontrollieren, indem sie Versuche machen. Es ist das überhaupt eine gute Methode. Die sicherste Autorität ist neben der zwingenden Deduktion der eigene Versuch. Es ist für einen Forscher kein schlimmes Verbrechen, in Einzelfragen seinem Urteil zu folgen und dabei Fehler zu begehen, sofern er sich nur in wesentlichen Punkten der äußersten Gewissenhaftigkeit befleißigt. Je wesentlicher die Frage, desto gesicherter sollte ihre Deduktion sein. Aber Zeit und Kraft des Forschers sind geringe, er muß damit haushalten, um etwas zu vollbringen, er muß auch hin und wieder wagen — er kann nicht alle Probleme selbst erledigen. Genug, daß er Fragen aufwirft, die von Belang sind, wenn auch die Erfahrung der Vielen seine Zahlenwerte ein wenig ummodellt. Mit einem großen mathematischen Apparat ließen sich ja diese Fragen bis aufs Tüpfelchen über dem I erledigen, aber für den Spieler ist es ratsamer, sich der Methode zu bedienen, die im Leben von Nutzen ist, und da ist es weniger die mathematische als die statistische Methode der Beobachtung, die er sich anzuzüchten hat.

# Kartenspiele sind ganz anders

- Jeder kennt nur seine Karten («imperfekte Information»).
- Bluffen beim Pokern lässt sich mathematisch begründen (bereits 1928 durch von Neumann angekündigt).
- Mathematisch handelt es sich um zufällig «gemischte Strategien» (wie bei Schere-Stein-Papier).
- Lasker untersucht 1929 stark vereinfachte Poker-Modelle für 2 Personen, die aber noch zu kompliziert für eine vollständige Untersuchung sind.

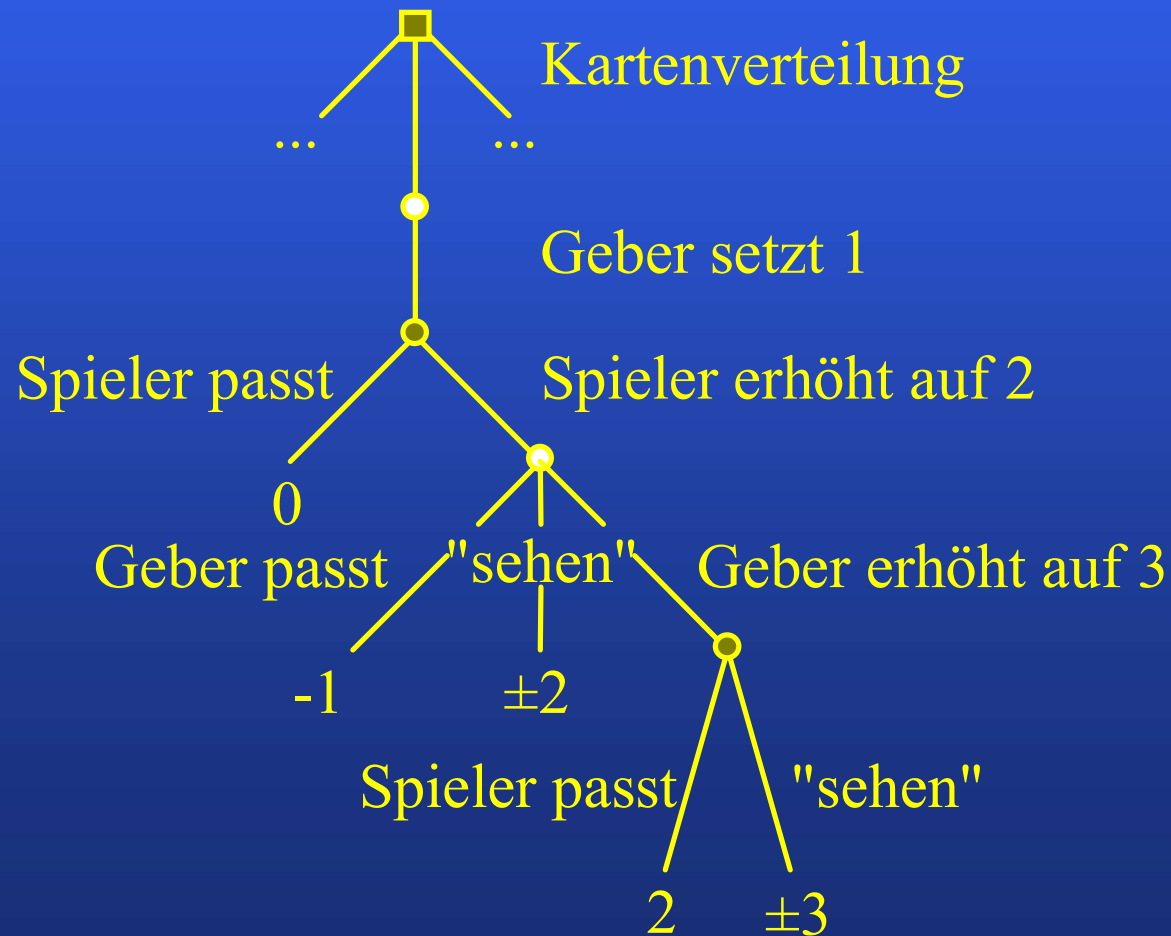




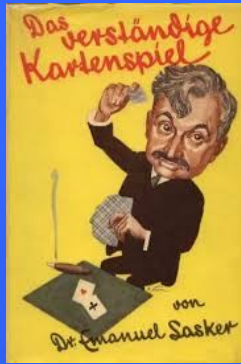


# Das Poker-Modell

Es wird mit 13 bzw. 20 Karten mit unterschiedlichen Werten gespielt. Jeder der beiden Spieler erhält eine Karte.

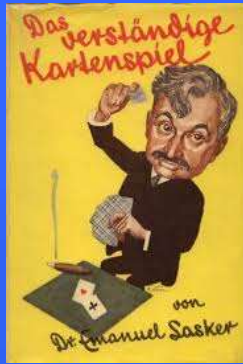


# Laskers Ergebnisse über Poker



- ... können nicht vollständig sein, weil seine Vereinfachungen nicht genügend drastisch sind.
- Allerdings macht Lasker auch a priori bereits scheinbar plausible Annahmen, die zu begründen wären.
- Er nimmt jeweils an, dass die Strategie eines Spielers bekannt sei (durch Beobachtung im Rahmen einer Partie-sequenz), und berechnet dann die optimale Gegenstrategie.
- Beidseitig gemischte Strategien zieht er nicht in Erwägung.

# Lasker über Bluffs

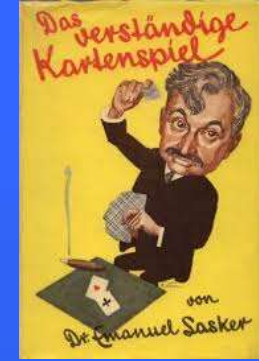


Ich unterscheide nun das normale Spiel und die Inversion. Beim normalen Spiel wettet man den höheren Betrag auf die höhere Hand, bei der Inversion umgekehrt den höheren Betrag auf die niedrigere Hand, den niedrigeren Betrag auf die höhere Hand.

Dies Moment ist von Bedeutung. Bei Pokerecht wie allen Pokerspielen überhaupt handelt es sich nie darum, daß ein Spieler eine gewisse Taktik befolgt, sondern immer nur darum, mit welcher Wahrscheinlichkeit er sie befolgt. Der Prozentsatz der Fälle, wo er sich in einer gewissen Situation auf eine gewisse Art benimmt, ist das Entscheidende. Manche Spieler bluffen auf eine augenscheinliche Art, in der Hoffnung, dadurch den Anschein zu erwecken, daß sie Bluffer sind. Man lasse sich dadurch nicht einfangen. Das einmalige Ereignis zählt bei Pokerspielen wenig, der Prozentsatz der Wiederholungen ist das Bedeutsame.



# Resümee



- Lasker erzielte, außer auf seinen Schüler Sprague, keine Wirkung auf die weitere Entwicklung der Spieltheorie.
- Er kannte noch nicht einmal die spieltheoretischen Ergebnisse, die bereits erzielt und publiziert worden waren.
- Laskers mathematisches Gespür hat manch interessanten Ansatz über Spiele ermöglicht. Er lässt es aber an Präzision mangeln, die ihm - auch in populären Büchern - möglich gewesen wäre. Keine Untersuchung wird komplett zu Ende geführt.

# Ich danke für Ihre Aufmerksamkeit!

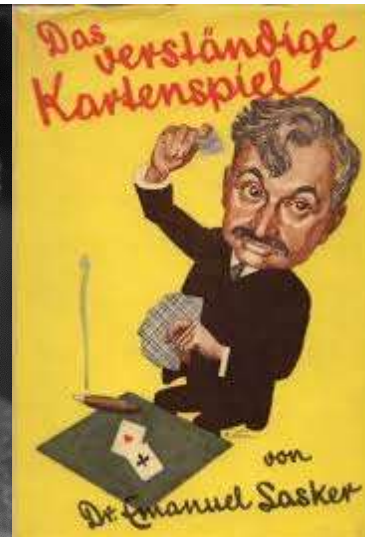
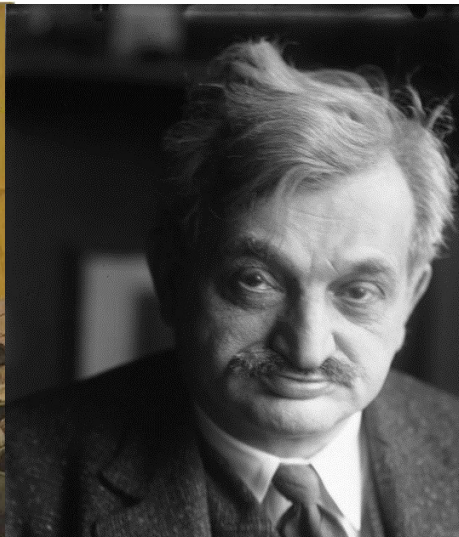
IX. Über Reihen auf der Convergenzgrenze.

Von EMANUEL LASKER, Dr. Phil.

Zur Theorie der Moduln und Ideale.

Von

E. LASKER in New-York.



## Fragen?

Eine ausführliche Darlegung des Themas «Lasker and the mathematics of games» erscheint in Richard Forster, Michael Negele, Raj Tischbierek (ed.): «Emanuel Lasker», Vol. II, Berlin 2020. Laskers Überlegungen zu Nim-Varianten wurden bereits in «Glück, Logik und Bluff» behandelt.

FORSTER NEGELE TISCHBIEREK

EMANUEL  
LASKER

VOLUME II  
CHOICES AND CHANCES  
CHESS AND OTHER GAMES OF THE MIND

EXZELSIOR VERLAG